مبرهنة

حتى تكون الشبكة E توزيعية يلزم ويكفي أن يكون من أجل أي ثلاثة عناصر z, y, x من E الشرط التالي محققاً:

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

البرهان:

لتكن E شبكة توزيعية ولنفرض أن $x \wedge z = y \wedge z$ و $x \vee z = y \vee z$

$x \vee (y \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$

$= ((x \wedge z) \vee y) = (x \wedge y) \vee y = y$ (توزيعية، ماصة)

$\Rightarrow x = y$

العكس: لنفرض أن الشرط محقق ولنبرهن أن E توزيعية:

من تحقق الشرط وبالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نستنتج أن الشبكة E معيارية

فإذا أخذنا العناصر $x, y \in E$ وفرضنا أن

$$\left.\begin{array}{l} a = (x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)) \\ b = (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)) \end{array}\right\} \text{---} (1)$$

وبما أن $x \wedge z \leq x \vee y$ والشبكة معيارية فإن

$$\left.\begin{array}{l} a = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) \\ b = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z) \end{array}\right\} \text{---} (2)$$

لأن الشبكة معيارية

من (2) $a \wedge y = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge y = ((x \wedge y) \vee z) \wedge y$

$= (x \wedge y) \vee (z \wedge y)$

من (2) $b \wedge y = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z) \wedge y = ((y \wedge z) \vee x) \wedge y$

$= (y \wedge z) \vee (x \wedge y)$

$$\Rightarrow \boxed{a \wedge y = b \wedge y} \quad (3)$$

$a \vee y = y \vee (x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)) = y \vee (z \wedge (x \wedge y))$

$= (y \vee z) \wedge (x \vee y)$

حسب الخاصة المعلومة

$b \vee y = y \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)) = y \vee (x \wedge (y \vee z))$ من الشبكة تبديلية

$= (y \vee x) \wedge (y \vee z)$

$\Rightarrow \boxed{a \vee y = b \vee y}$ (4)

من (3) ، (4) نستنتج بالاعتماد على المبرهن أن $a = b \Leftarrow a \wedge x = b \wedge x$ بالإضافة إلى ذلك

حسب الخاصة المعلومة

(2) من $a \wedge x = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge x = ((x \wedge y) \vee z) \wedge x$

$= (x \wedge y) \vee (z \wedge x)$

باستخدام الخاصة التبديلية

(2) من $b \wedge x = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z) \wedge x = ((y \wedge z) \vee x) \wedge x) \wedge (y \wedge z)$

$= x \wedge (y \vee z)$

$\Rightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (z \wedge x) \Rightarrow$ ع توزيعية

المتمم النسبي : سبب بالضرورة أعداد

لتكن ع شبكة ما ، ولتكن المجال $[a,b]$ حيث $a \leq b$

تعريف :

إذا كان $x \in [a,b]$ فإننا ندعو متمم x بالنسبة للمجال $[a,b]$ كل عنصر y (إن وجد) يحقق ما يلي $x \vee y = b$ ، $x \wedge y = a$

ملاحظة :

(1) إذا كان y متمم لـ x بالنسبة إلى المجال $[a,b]$ فإن $y \in [a,b]$ وذلك لأن

$y \geq x \wedge y = a$ ، $y \leq x \vee y = b$

(2) b هو المتمم الوحيد لـ a بالنسبة للمجال $[a,b]$

(3) يمكن أن لا يملك العنصر x بالضرورة متمم نسبي كما أنه يمكن أن يملك عدة متممات

مثال:

لتكن الشبكة $E=\{1,2,4,5,20\}$ المرتبة بعلاقة يقسم

في المجال $[1,4]$ نلاحظ أن 2 لا تملك متمم نسبي

في المجال $[1,20]$ نلاحظ أن للعدد 5 متممين هما 2 و 4 وأن المتمم النسبي للعدد 2 هو 5 والمتمم النسبي للعدد 4 هو 5

مبرهنة:

لتكن E شبكة ما، $[a,b]$ مجال ما في E و x عنصر من المجال $[a,b]$

- إذا كانت E معيارية فإن المتممات النسبية المختلفة للعنصر x تكون غير متقارنة فيما بينها
- إذا كانت E توزيعية فإن للعنصر x على الأكثر متمم نسبي واحد

البرهان:

- إذا كان y_1, y_2 متممين نسبيين لـ x فإن

$$x\wedge y_1 = a = x\wedge y_2$$
$$x\vee y_1 = b = x\vee y_2$$

من المبرهنة ما قبل الأخيرة ينتج أنه إما $y_1=y_2$ أو y_1 و y_2 غير متقارنين (من أجل الشبكة المعيارية) ومنه ينتج أن المتممات المختلفة في الشبكة المعيارية غير متقارنة

ومن المبرهنة الأخيرة إذا كانت E توزيعية ينتج من المساويتين السابقتين أن $y_1=y_2$ أي أن الشبكة التوزيعية لا يمكن أن يملك العنصر x أكثر من متمم نسبي واحد

تعريف:

نقول عن الشبكة E أنها متممة نسبياً إذا كان في أي مجال $[a,b]$ يملك كل عنصر x من المجال على الأقل متمم نسبي واحد

الشبكة المتممة:

سنفترض هنا أن الشبكة E تملك العنصر الأصغر 0 والعنصر الأكبر 1

تعاريف:

- إذا كانت $x \in E$ فإننا ندعو متمم x كل متمم لـ x بالنسبة للمجال [0,1]
- نقول عن شبكة E إنها شبكة متممة نسبياً إذا كان كل عنصرين في E يملك بالمجال متمم واحد

ملاحظات:

- المتمم x' للعنصر x (إن وجد) يكون معرفاً بالشكل $x \vee x' = 1$ ، $x \wedge x' = 0$
- وجود المتمم ووحدانيته غير مؤكدتين

أمثلة:

في السلسلة أي عنصر مختلف عن 0 و 1 (الأصغر ، الأكبر) لا يملك متمم

في الشبكة $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ المرتبة بعلاقة تقسيم يكون للعدد 5 عنصرين متممين 2 و 4 وأيضاً العدد 5 هو متمم للاثنين ، 1 ، 20 كل منهما متمم للآخر

بشكل عام 0 ، 1 دائماً كل منهما متمم للآخر

- كل شبكة متممة نسبياً تملك العنصر الأصغر 0 والعنصر الأكبر 1 تكون متممة
- الشبكة المتممة لا تكون بالضرورة متممة نسبياً

أمثلة:

في الأمثلة الآتية تكون الشبكات مرتبة بعلاقة تقسيم

(a) (b) (c)

في الشبكة (a) نلاحظ أنها متممة (بدون وحدانية المتمم) ولكنها ليست متممة نسبياً لأنه في المجال [1,4] العدد 2 لا يملك متمم نسبي في هذا المجال

في الشبكة (b) نلاحظ أنها متممة ومتممة نسبياً مع عدم وحدانية المتمم

في الشبكة (c) نلاحظ أنها متممة ومتممة نسبياً مع وحدانية المتمم

في الشبكة $(E, \cup, \cap)$ تكون متممة الاحصاء على اي $X \subseteq E$ فإن C_X هو متمم من حيث المجموعة X

مبرهنة

في الشبكة التوزيعية كل عنصر على الأكثر متمم وحيد

البرهان

ينتج من المبرهنة السابقة حيث ان كل عنصر في الشبكة التوزيعية على متمم نسبي واحد على الأكثر أي ان اي عنصر x على متمم (متمم نسبي بالنسبة للجال $[a,b]$) واحد على الأكثر حسب المبرهنة السابقة

مبرهنة :

اذا كانت الشبكة المتممة معيارية (أو توزيعية) فإنها تكون متممة نسبياً

البرهان :

ليكن $[a,b]$ جال في الشبكة E المعيارية وليكن $x \in [a,b]$ وليكن x' متمم x ولنفرض ان $y = (a \vee x') \wedge b$ وبالتالي فإن $y = a \vee (x' \wedge b)$ (لأن الشبكة معيارية)

$$y \wedge x = (a \vee x') \wedge b \wedge x = (a \vee x') \wedge x$$ لأن $a \leq x \leq b$

$$= a \vee (x' \wedge x)$$ لأنها معيارية

$$= a \vee 0 = a$$

$$y \vee x = (a \wedge (x' \wedge b)) \vee x = (a \vee x) \vee (x' \wedge b)$$ تبديلية

$$= x \vee (x' \wedge b)$$ لأنها معيارية

$$= (x \vee x') \wedge b$$

$$= 1 \wedge b = b$$

أي ان y هو متمم نسبي للعنصر x في الجال $[a,b]$ وبالتالي فإن الشبكة متممة نسبياً

انتهت المادة